ΔΗΜΟΣΘΕΝΗΣ ΜΑΡΜΟΥΤΖΑΚΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Η ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ

… ΣΕ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Κάθε ερώτηση αντιστοιχεί με τη σελίδα του σχολικού βιβλίου, για να την βρείτε και να την διαβάσετε

Σε κάθε ερώτηση σημειώνεται η χρονιά που έχει μπει ως θέμα στις Πανελλήνιες Εξετάσεις

Στο τέλος υπάρχουν σχόλια σε κάθε κεφάλαιο, που βοηθούν για τις ερωτήσεις Σωστού - Λάθους των Πανελληνίων Εξετάσεων

Α. ΟΡΙΣΜΟΙ

α/α	Διατύπωση ερώτησης	σελ.
1	Έστω συνάρτηση f και A μη κενό υποσύνολο του R. Τι ονομάζουμε **πραγματική συνάρτηση** με Πεδίο Ορισμού το A; (Ε2018, Κ2019)	15
2	Τι ονομάζουμε **σύνολο τιμών** συνάρτησης;	15
3	Τι ονομάζουμε **γραφική παράσταση** συνάρτησης;	16
4	Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται **ίσες**; (Κ2007, Κ2021, Ε2012, Κ2016)	23
5	Πως ορίζουμε τις **πράξεις** συναρτήσεων;	24
6	Έστω δύο συναρτήσεις f, g με Πεδία Ορισμού A και B αντίστοιχα. Τι ονομάζουμε **σύνθεση** της f με την g;	25
7	Πότε μία συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** και πότε **γνησίως φθίνουσα** σε διάστημα Δ του Πεδίου Ορισμού της;	31
8	Πότε μία συνάρτηση f με Πεδίο Ορισμού A θα λέμε ότι παρουσιάζει **μέγιστο** (ολικό) και πότε ότι παρουσιάζει **ελάχιστο** (ολικό) στο $x_0 \in A$; (Κ2014, Ε2010)	32
9	Πότε μία συνάρτηση είναι **1 - 1** ; (Ε2005, Ε2015)	33
10	Πως ορίζεται η **αντίστροφη** συνάρτηση f^{-1} ; (Κ2019)	35
11	Να διατυπώσετε το **κριτήριο παρεμβολής** (Ε2016, Κ2021)	51
12	Να δώσετε τον ορισμό της **ακολουθίας**	68
13	Πότε μία ακολουθία (α_ν) έχει **όριο** το $l \in R$;	68
14	Πότε μία συνάρτηση λέγεται **συνεχής σε σημείο x_0** του Πεδίου ορισμού της; (Κ2015, Ε2009)	70
15	Πότε μία συνάρτηση f λέγεται **συνεχής στο (α, β)** ; (Ε2004)	73
16	Πότε μία συνάρτηση f λέγεται **συνεχής στο [α, β]** ; (Κ2008. Κ2012, Κ2017, Ε2004, Ε2021)	73
17	Να διατυπώσετε το **Θ. Bolzano** και να δώσετε τη **γεωμετρική του ερμηνεία.** (Ε2014)	74
18	Να διατυπώσετε το **θεώρημα ενδιάμεσων τιμών**. (Κ2005, Κ2015)	76
19	Να διατυπώσετε το **θεώρημα μέγιστης & ελάχιστης τιμής**	77
20	Τι ορίζουμε ως **εφαπτομένη** της C_f σε σημείο $M(x_0, f(x_0))$; (Κ2000)	94
21	Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι **παραγωγίσιμη σε σημείο x_0** του Π. Ορισμού της; (Κ2004, Κ2009)	95
22	Πότε μία συνάρτηση είναι **παραγωγίσιμη σε διάστημα (α, β)** του Πεδίου Ορισμού της;	104
23	Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση είναι **παραγωγίσιμη στο διάστημα [α, β]** του Πεδίου Ορισμού της; (Κ2013, Ε2010, Κ2020, Κ2023)	104
24	Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση f(x)=y, τι ονομάζουμε **ρυθμό μεταβολής** του y ως προς το x , στο σημείο x_0 ;	123
25	Να διατυπώσετε το **Θ. Rolle** και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία. (Ε2007, Ε2012, Ε2020, Ε2021, Κ2023)	128
26	Να διατυπώσετε το **Θεώρημα Μέσης Τιμής** (Θ.Μ.Τ.) και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία. (Κ2003, Κ2013, Ε2008, Κ2016, Ε2019, Ε2022)	128
27	Να δώσετε τους ορισμούς για **τ. μέγιστο** (Κ2012, Ε2020) και **τ. ελάχιστο** (Κ2015) συνάρτησης .	140-141
28	Να διατυπώσετε το **Θ. Fermat** (Κ2019, Κ2022, Ε2023)	142
29	Ποια ονομάζουμε **κρίσιμα σημεία** (Ε2013)	143
30	Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε θα λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα άνω (**κυρτή**) και πότε ότι η f στρέφει τα κοίλα κάτω (**κοίλη**); (Κ2006,Κ2010, Κ2013)	155
31	Πότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ θα ονομάζεται **σημείο καμπής** της γραφικής παράστασης της f;	157
32	Πότε η ευθεία $x = x_0$ θα ονομάζεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f; (Κ2010, Ε2003, Ε2015, Κ2022)	161

33	Πότε η ευθεία $y = y_0$ θα ονομάζεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$); (Κ2007, Ε2016,Ε2023)	162
34	Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$, λέγεται **ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$); (Κ2005, Κ2011, Ε2022)	162
35	Να διατυπώσετε τους κανόνες **De L'Hospital.**	164-165
36	Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ; (Ε2006, Ε2011, Ε2014)	185
37	Να δώσετε τον ορισμό του εμβαδού του χωρίου Ω, που ορίζεται από την γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με $f(x)\geq 0$, τον άξονα x'x και τις ευθείες x=α και x=β.	210-211
38	Να δώσετε τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος μιας συνεχούς συνάρτησης f στο [α,β]	211
39	Να διατυπώσετε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού	216

B. ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

α/α	Διατύπωση ερώτησης	σελ.
1	Να εξηγήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι **συμμετρικές** ως προς την διχοτόμο της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων.	36
2	Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε πολυώνυμο $P(x)$ ισχύει ότι $\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$	49
3	Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το **Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών** (Κ2005, Κ2015, Κ2020)	76
4	Να αποδείξετε ότι αν μία συνάρτηση είναι **παραγωγίσιμη** σε σημείο x_0, τότε είναι και **συνεχής** στο σημείο αυτό. (Κ2000, Κ2003, Ε2007, Ε2013, Κ2018, Ε2022)	99
5	Έστω η σταθερή συνάρτηση f(x)=c. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει f'(x)=0 δηλαδή **(c)'=0**.	105
6	Έστω η συνάρτηση **f(x)=x**. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει f'(x)=1 δηλαδή **(x)'=1**.	105
7	Έστω η συνάρτηση $\boldsymbol{f(x) = x^{\nu}}$, $\nu \in N - \{0,1\}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x) = \nu \cdot x^{\nu-1}$ δηλαδή $\boldsymbol{(x^{\nu})' = \nu \cdot x^{\nu-1}}$.	106
8	Έστω η συνάρτηση $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x}}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $\boldsymbol{f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$, δηλαδή $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (Ε2005, Ε2009)	106
9	Να αιτιολογήσετε ότι η συνάρτηση $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x}}$ **δεν είναι παραγωγίσιμη** στο $x_0 = 0$.	97
10	Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σε σημείο x_0 , να αποδείξετε ότι και η **συνάρτηση f+g** είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει : $(f+g)'(x_0) = f'(x_0)+ g'(x_0)$ (Ε2020, Κ2023)	111
11	Να αποδείξετε ότι για τρεις παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g, h ισχύει : (f(x)g(x)h(x))'=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)	112
12	Έστω η συνάρτηση $\boldsymbol{f(x) = x^{-\nu}, \nu \in N^*}$. Να αποδείξετε ότι είναι παραγωγίσιμη στο R^* και ισχύει $\boldsymbol{f'(x) = -\nu \cdot x^{-\nu-1}}$.	113
13	Έστω η συνάρτηση **f(x)=εφx**. Να αποδείξετε ότι είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $R - \{x/\sigma\upsilon\nu x \neq 0\}$ και ισχύει $\boldsymbol{(\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}$.	114
14	Έστω η συνάρτηση $\boldsymbol{f(x) = x^{\alpha}, \alpha \in R - Z}$. Να αποδείξετε ότι είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $(x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$.	116
15	Έστω η συνάρτηση $\boldsymbol{f(x) = \alpha^{x}, \alpha > 0}$**.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $(\alpha^x)' = \alpha^x \cdot ln\alpha$.	116
16	Έστω η συνάρτηση $f(x) = \boldsymbol{ln|x|, x \in R^*}$. Να αποδείξετε ότι είναι παραγωγίσιμη στο R^* και ισχύει $(ln|x|)' = \frac{1}{x}$. (Κ2008)	117
17	Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν ● f συνεχής στο Δ και ● f'(x)=0 για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, να αποδείξετε ότι η f είναι **σταθερή** σε όλο το Δ (Ε2004. Κ2009, Κ2014, Ε2021)	133

18	Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν ● f, g συνεχείς στο Δ και ●f'(x)=g'(x) για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, να αποδείξετε ότι **υπάρχει σταθερά c** τέτοια ώστε για κάθε x∈Δ να ισχύει f(x) = g(x)+c .	133
19	Έστω μία συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι αν f'(x)>0 σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι **γνησίως αύξουσα** σε όλο το Δ. (E2000, K2006, K2012, K2017, K2019, K2021,E2023)	135
20	Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα **εσωτερικό** σημείο του Δ. Να δείξετε ότι αν η f παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο x_0 και είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο αυτό, τότε **f'(x_0) = 0.** (K2004, K2011, E2013, E2016, E2017)	142
21	Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Να αποδείξετε ότι αν f'(x)>0 στο (α, x_0) και f'(x)<0 στο , (x_0, β) τότε το f(x_0) είναι **τοπικό μέγιστο** της f. (E2012, K2016)	144
22	Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β), **με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 στο οποίο όμως η f είναι συνεχής**. Να αποδείξετε ότι αν η f'(x) διατηρεί πρόσημο στο (α, x_0)∪(x_0, β), τότε το f(x_0) **δεν είναι τοπικό ακρότατο** και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) (E2014, E2018)	144
23	Να αποδείξετε ότι: Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F μία **παράγουσα** της f στο Δ, τότε ● Όλες οι συναρτήσεις της μορφής G(x)=F(x) + c, c∈R, είναι παράγουσες της f στο Δ και ● κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή G(x)=F(x) + c, c∈R (E2001, E2003, K2010, E2015, K2022)	186
24	Έστω μια συνεχής συνάρτηση f σε ένα διάστημα [α, β]. Αν G είναι μία παράγουσα της f στο [α, β], να αποδείξετε ότι $\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$ (K2002, K2013, E2008, E2018)	217
25	Έστω δύο συναρτήσεις f, g **συνεχείς** στο [α, β] με f(x)≥g(x)≥0, για κάθε x∈[α, β]. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f , g και τις κατακόρυφες ευθείες x=α και x=β , είναι $E(\Omega) = \int_\alpha^\beta (f(x) - g(x))dx$	225
26	Έστω δύο συναρτήσεις f, g **συνεχείς** στο [α, β] με f(x)≥g(x), για κάθε x∈[α, β]. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f , g και τις κατακόρυφες ευθείες x=α και x=β , είναι $E(\Omega) = \int_\alpha^\beta (f(x) - g(x))dx$	226
27	Έστω μια συνάρτηση g **συνεχής** στο [α, β] με g(x)≤0, για κάθε x∈[α, β]. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την γραφική παράσταση της g ,τον άξονα x'x και τις κατακόρυφες ευθείες x=α και x=β , είναι $E(\Omega) = -\int_\alpha^\beta g(x)dx$	226

Γ. ΣΧΟΛΙΑ

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. Κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει με τη γραφική παράσταση της f **το πολύ ένα** κοινό σημείο
   Έτσι ο κύκλος **δεν αποτελεί** γραφική παράσταση συνάρτησης
2. Το Πεδίο Ορισμού της f είναι το σύνολο A των **τετμημένων** των σημείων της C_f .
   Το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο f(A) των **τεταγμένων** των σημείων της C_f.
3. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης ***-f*** είναι **συμμετρική, ως προς τον άξονα x'x** , της γραφικής παράστασης της *f*.
4. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της C_f που βρίσκονται **πάνω** από τον άξονα x'x και από τα συμμετρικά ως προς τον άξονα x'x, των τμημάτων της C_f που βρίσκονται **κάτω** από τον άξονα αυτόν.
5. Η σύνθεση gof ορίζεται αν $f(A) \cap B \neq \emptyset$, όπου A και B τα Πεδία Ορισμού των *f, g* αντίστοιχα.
6. Αν *f, g* είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι $f\circ g$ και $g\circ f$, τότε αυτές δεν είναι υποχρεωτικά ίσες.

7. Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $h(gof)$τότε ορίζεται και η *(hog)of* και ισχύει $ho(gof)$*=(hog)of*. Τη συμβολίζουμε *hogof* .
8. Η συνάρτηση f(x)=ημx παρουσιάζει **μέγιστο** y=1 σε καθένα από τα σημεία $2k\pi+\frac{\pi}{2}, k \in Z$ (δηλ. σε **άπειρα σημεία**) και **ελάχιστο** y= -1 σε καθένα από τα σημεία $2k\pi-\frac{\pi}{2}, k \in Z$ (επίσης σε **άπειρα σημεία**) , αφού $-1 \leq \eta\mu x \leq 1$, για κάθε $x \in R$.
9. Η συνάρτηση f(x) = x^3, δεν παρουσιάζει ούτε μέγιστο , ούτε ελάχιστο, αφού είναι γνησίως αύξουσα.
10. Μία συνάρτηση $f: A \rightarrow R$ **είναι συνάρτηση 1-1** αν και μόνο αν για οποιαδήποτε x_1, x_2 ∈A ισχύει η συνεπαγωγή : αν $f(x_1) = f(x_2)$ τότε $x_1 = x_2$.
11. Μία συνάρτηση f είναι 1-1 , αν και μόνο αν :
    ● Για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση f(x) = y έχει ακριβώς μία λύση ως προς x.
    ● Δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράστασή της **το πολύ σε ένα σημείο**.
    ● Αν μία συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη τότε είναι και 1-1.
12. Αν η f αντιστρέφεται τότε ισχύουν $f^{-1}(f(x)) = x, x \in A$ και $f(f^{-1}(y)) = y, y \in f(A)$.

ΟΡΙΑ

13. Για να αναζητήσουμε το όριο της f στο x_0, θα πρέπει
    ● η f να είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ ή (α, x_0) ή (x_0, β)
    ● το x_0 μπορεί να ανήκει στο Πεδίο Ορισμού της συνάρτησης ή να μην ανήκει σε αυτό
    ● αποδεικνύεται ότι το όριο είναι **ανεξάρτητο των άκρων α, β** των διαστημάτων (α, x_0) ή (x_0, β) στα οποία θεωρούμε ότι είναι ορισμένη η συνάρτηση.
14. Ισχύουν οι ισοδυναμίες ● $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}(f(x)-l) = 0$
    ● $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} f(x_0+h) = l$
15. $|\eta\mu x| \leq |x|$, για κάθε $x \in R$. Η **ισότητα ισχύει μόνο** για x=0
16. Για να αναζητήσουμε το όριο μιας συνάρτησης στο **+**∞ θα πρέπει να είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής (α, +∞), ενώ για να αναζητήσουμε το όριο στο **-**∞ θα πρέπει η συνάρτηση να είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής (-∞, 0)

ΣΥΝΕΧΕΙΑ

17. Μια συνάρτηση **δεν είναι συνεχής** σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της αν
    ● δεν υπάρχει το όριό της στο x_0
    ● υπάρχει το όριό της στο x_0, αλλά είναι διαφορετικό από το $f(x_0)$.
18. Η πολυωνυμική συνάρτηση, η ρητή συνάρτηση, οι συναρτήσεις ημx και συνx καθώς η εκθετική και η λογαριθμική, είναι συνεχείς συναρτήσεις.
19. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbf{x_0}$ και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $\mathbf{f(x_0)}$, τότε η σύνθεσή τους g∘f είναι συνεχής στο x_0.
20. **Συνέπειες θεωρήματος Bolzano**:
    ● Αν μία συνάρτηση f είναι **συνεχής** σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σε αυτό, τότε η f **διατηρεί πρόσημο** στο διάστημα Δ
    ● Μια **συνεχής** συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι **διαδοχικές ρίζες** της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

21. Αν μία συνάρτηση δεν είναι συνεχής σε ένα διάστημα [α, β], τότε δεν παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές.
22. Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω **μιας συνεχούς και μη σταθερής** συνάρτησης f είναι διάστημα.

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

23. Όταν ένα κινητό **κινείται προς τα δεξιά**, τότε είναι $u(t) \geq 0$, ενώ όταν **κινείται προς τα αριστερά** τότε $u(t) \leq 0$.
24. Ο **συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης** (ε) της C_f , μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f , στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ είναι η παράγωγος της f στο x_0 , δηλαδή είναι **$\lambda = f'(x_0)$** και έχει εξίσωση **$\varepsilon: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.**
25. Αν στην ισότητα $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, θέσουμε $x = x_0 + h$, τότε έχουμε έναν ακόμη τύπο για τον ορισμό της παραγώγου , δηλαδή $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.
    Πολλές φορές το $h = x - x_0$, συμβολίζεται Δx, ενώ το $f(x_0 + h) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ συμβολίζεται με $\Delta f(x_0)$, οπότε ο παραπάνω ορισμός γράφεται $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$.
    Η τελευταία ισότητα οδήγησε το Leibniz να συμβολίσει την παράγωγο στο x_0 με $\frac{df(x_0)}{dx}$ ή $\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x = x_0}$.
26. Η **στιγμιαία ταχύτητα** ενός κινητού, τη χρονική στιγμή t_0, είναι η παράγωγος της συνάρτησης θέσης x=S(t) τη χρονική στιγμή t_0. Δηλαδή **$u(t_0) = S'(t_0)$**.
27. Αν μία συνάρτηση f **δεν** είναι συνεχής σ'ένα σημείο x_0 , τότε **δεν** μπορεί να είναι και παραγωγίσιμη στο x_0.
28. Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη **στο x_0** και η f είναι παραγωγίσιμη **στο $g(x_0)$** , τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$.
29. Με το συμβολισμό του Leibniz, η παράγωγος της σύνθετης συνάρτησης f(g(x)), αν u=g(x) και y=f(u) παίρνει τη μορφή $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$, γνωστός ως **κανόνας της αλυσίδας**.
30. Ο **ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας** (u) είναι η επιτάχυνση (α) και ο **ρυθμός μεταβολής της θέσης** (τετμημένης) (S) του κινητού ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0 , είναι η ταχύτητα. Δηλαδή ισχύει ότι $\alpha(t_0) = u'(t_0) = S''(t_0)$
31. Σε οικονομικά προβλήματα, το κόστος παραγωγής Κ, η είσπραξη Ε και το κέρδος P, εκφράζονται συναρτήσει της ποσότητας x του παραγόμενου προϊόντος. Έτσι η παράγωγος K'(x) παριστάνει το ρυθμό μεταβολής του κόστους Κ ως προς την ποσότητα x , όταν $x = x_0$ και λέγεται **οριακό κόστος**. Ανάλογα ορίζονται και οι έννοιες **οριακή είσπραξη** και **οριακό κέρδος** στο x_0.
32. Ένα τοπικό μέγιστο μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο
33. **Αν μία συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο** (ολικό) τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα, ενώ **αν παρουσιάζει ελάχιστο** (ολικό) τότε αυτό θα είναι το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα.
34. Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα μιας συνάρτησης **δεν είναι υποχρεωτικά** μέγιστο (ολικό) αυτής. Επίσης το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα μιας συνάρτησης **δεν είναι πάντοτε** ελάχιστο (ολικό) της συνάρτησης.
35. **Πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων** μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ είναι
    ● Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγος της f μηδενίζεται
    ● Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται
    ● Τα άκρα του Δ (αν ανήκουν στο Πεδίο ορισμού της - κλειστό διάστημα)
    Τα δύο πρώτα λέγονται **κρίσιμα σημεία** της f .
36. Αν μία συνάρτηση f είναι **κυρτή** σε ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ, βρίσκεται "**κάτω" από τη γραφική της παράσταση**, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους
37. Αν μία συνάρτηση f είναι **κοίλη** σε ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ, βρίσκεται "**πάνω" από τη γραφική της παράσταση**, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους

38. Στα σημεία καμπής η εφαπτομένη της C_f, **"διαπερνά"** την καμπύλη.
39. Οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ είναι :
    - Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία μηδενίζεται η δεύτερη παράγωγος της f
    - Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία δεν υπάρχει η δεύτερη παράγωγος της f
40. Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις **βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2** δεν έχουν ασύμπτωτες
41. Οι ρητές συναρτήσεις $\frac{P(x)}{Q(x)}$, με βαθμό του αριθμητή P(x) μεγαλύτερο **τουλάχιστον κατά δύο** του βαθμού του παρανομαστή, δεν έχουν πλάγιες ασύμπτωτες.

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

42. Αν f(x)≥0, για κάθε x∈[α, β] τότε το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta \mathrm{f(x)dx}$ δίνει το εμβαδόν Ε(Ω) του χωρίου Ω που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα x'x και τις κατακόρυφες ευθείες x=α και x=β.
    Δηλαδή $E(\Omega) = \int_\alpha^\beta f(x)dx$
    Επομένως $\int_\alpha^\beta \mathrm{f(x)dx} \geq 0$.
43. Ισχύει ότι $\int_\alpha^\beta c\, dx = c(\beta - \alpha)$, για οποιοδήποτε c∈ R
44. Έστω μια συνεχής συνάρτηση f σε ένα διάστημα [α, β].Αν f(x) ≥0, για κάθε x∈[α, β] και η συνάρτηση f **δεν είναι παντού μηδέν** στο διάστημα αυτό, τότε $\int_\alpha^\beta \mathrm{f(x)dx} > 0$.
45. Αν f είναι μια **συνεχής** συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε η συνάρτηση $F(x) = \int_\alpha^x f(t)dt, x \in \Delta$, είναι μία **παράγουσα της f** στο Δ.
    Δηλαδή ισχύει $\left(\int_\alpha^x f(t)dt\right)' = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

Καλό διάβασμα!